CIPE

Cuadernos del

JUEGOS DE OPCIONES REALES

UN ENFOQUE DE VALORACIÓN PARA INVERSIONES ESTRATÉGICAS BAJO INCERTIDUMBRE

Carlos Andrés Zapata Quimbayo

N.º 22 - DICIEMBRE DE 2015

Universidad Externado de Colombia

CIPE

Cuadernos del

JUEGOS DE OPCIONES REALES

UN ENFOQUE DE VALORACIÓN PARA INVERSIONES ESTRATÉGICAS BAJO INCERTIDUMBRE

Carlos Andrés Zapata Quimbayo

n.º 32, diciembre de 2015

Universidad Externado de Colombia

Los Cuadernos de trabajo del Centro de Investigaciones y Proyectos Especiales, CIPE, de la Facultad de Finanzas, Gobierno y Relaciones Internacionales, son una contribución a la investigación, al desarrollo del conocimiento, a los debates con especial significado y alcance en las políticas públicas, las finanzas, la economía y las relaciones internacionales. En los Cuadernos se expresan los avances de las líneas y los grupos de investigación del CIPE y, por tanto, son una muestra de los procesos académicos e intelectuales que adelantan profesores, investigadores y estudiantes de la Universidad Externado de Colombia. El CIPE tiene tres grupos de investigación reconocidos por COLCIENCIAS: Observatorio de Análisis de los Sistemas Internacionales, OASIS; Observatorio de Políticas, Ejecución y Resultados de la Administración Pública, OPERA; Observatorio de Economía y Operaciones Numéricas, ODEON.

RECTOR DE LA UNIVERSIDAD EXTERNADO DE COLOMBIA
Juan Carlos Henao

DECANO DE LA FACULTAD DE FINANZAS, GOBIERNO Y RELACIONES INTERNACIONALES
Roberto Hinestrosa Rey

COORDINACIÓN DEL CIPE
Frédéric Massé

ISSN 1794-7715
© Universidad Externado de Colombia, 2015
Derechos exclusivos de publicación y distribución de la obra
Calle 12 n.º 1-17 este. Bogotá, Colombia.
Tel.: 341 99 00 ext. 2002, Fax: 286 96 76
Dirección electrónica: cipe.adm@uexternado.edu.co

Primera edición: diciembre de 2015
Diagramación: Karina Betancur
Impresión y encuadernación: Digiprint Editores S.A.S.
Tiraje de 1 a 300 ejemplares
Impreso en Colombia
Printed in Colombia

Juegos de opciones reales
Un enfoque de valoración para inversiones estratégicas bajo incertidumbre

Carlos Andrés Zapata Quimbayo*

PRÓLOGO

Un proyecto de inversión representa la posibilidad (expectativa) de obtener beneficios futuros cuando se incurre en un costo inmediato determinado (Dixit y Pindyck, 1994). Sin embargo, estos beneficios no son seguros y dependen de los acontecimientos inesperados (inciertos) del mercado que lo afectan positiva o negativamente en el futuro, pero la empresa o dirección del proyecto puede responder estratégicamente al tomar cursos alternativos para hacer frente y mitigar los resultados no deseados o mejorarlos cuando se identifican buenas expectativas.

Además, debido a la liberalización comercial y la desregulación en las diferentes economías, muchas empresas se enfrentan a una competencia desenfrenada que ahora se desarrolla a escala mundial. La menor protección de la industria local, producto de la reducción o eliminación de las barreras comerciales, ha llevado a cambios en las estructuras de mercado mediante la consolidación de oligopolios, en los que grandes empresas han adquirido cierto poder de mercado y la incertidumbre termina siendo mayor.

Los métodos tradicionales de valoración basados en el modelo de flujo de caja descontado, como el valor presente neto (VPN) o la tasa interna de retorno (TIR), no incorporan estos elementos y generan valoraciones inconsistentes con el funcionamiento real del mercado. El desarrollo de valoraciones más precisas requiere, por tanto, de métodos

* Docente investigador, Facultad de Finanzas, Gobierno y Relaciones Internacionales, Universidad Externado de Colombia. Economista y candidato a Magíster en Finanzas. carlosa.zapata@uexternado.edu.co.

alternativos para superar estas limitaciones y las decisiones de inversión pueden apoyarse en un análisis de valoración que involucre incertidumbre y flexibilidad. Como respuesta, los desarrollos recientes en las finanzas corporativas han integrado el análisis de valoración de opciones reales con los principios de la teoría de juegos, construyendo así un análisis de valoración que incorpora las interacciones estratégicas con la toma de decisiones bajo incertidumbre.

Este documento presenta los avances recientes en la valoración de proyectos de inversión, a través del enfoque de "juegos de opciones reales" y describe de forma sucinta la construcción y el desarrollo de esta herramienta. Para ello, primero se aborda de forma separada el análisis de valoración con opciones reales (sección 2) y de la teoría de juegos (sección 3), identificando los principios, supuestos y modelos antes de ponerlos en práctica y, luego se integran en el nuevo enfoque (sección 4), teniendo en cuenta su analogía con los métodos anteriores, pero se resaltan las dificultades en su aplicación.

1. INTRODUCCIÓN

En el mundo actual de los negocios, las empresas se enfrentan a altos niveles de incertidumbre cuando toman decisiones sobre futuras oportunidades de inversión, y realizar una valoración correcta es más complejo de lo que el análisis estándar basado en el modelo de flujo de caja descontado (FCD) puede sugerir (Smit y Trigeorgis, 2004), dadas las limitaciones que este presenta por su carácter estático.

Un análisis adecuado requiere que la empresa pueda revisar o adaptar las decisiones futuras, en respuesta a los acontecimientos inesperados del mercado. Cada decisión de inversión, por ejemplo, puede estar acompañada de estrategias óptimas que permitan tomar cursos alternativos como: expandir cuando se identifiquen mejores condiciones en el mercado, o contraer, aplazar, abandonar cuando el resultado sea peor de lo esperado (Trigeorgis, 1996; Amram y Kulatilaka, 1999).

Estas decisiones óptimas representan opciones reales que han sido construidas al adaptar los modelos de valoración de opciones financieras[1] desarrollados en los trabajos seminales de Black y Scholes (1973), Merton (1973) y Cox, Ross y Rubinstein (1979). Una ventaja adicional que se identifica en su aplicación, es que permite reducir las complejas estructuras de los proyectos de inversión a simples estructuras analíticas conformadas por diferentes tipos de opciones reales simples (Smit y Trigeorgis, 2004) con fácil aplicación.

La adaptación de los modelos de valoración de opciones financieras se identifica inicialmente en los trabajos de Merton (1977) y Myers (1977). Merton (1977) amplía el análisis de aplicación de la fórmula Black-Scholes a los precios de los pasivos cuyo valor es un contingente sobre el valor de la empresa. Este procedimiento permite valorar la flexibilidad en términos analíticos y

[1] Una aplicación adecuada requiere, además, la integración de estos modelos con la técnica de simulación de Monte Carlo.

relaciona la estructura de la empresa a un proceso que incluye un movimiento geométrico browniano (MGB)[2]. Su propuesta se extiende al campo de otros activos y a las oportunidades de inversión, las cuales pueden ser vistas como opciones en las diferentes etapas de su desarrollo.

Myers (1977) adopta esta propuesta de valoración y crea el enfoque de opciones reales al mostrar que "el valor de una empresa se deriva no solo de su patrimonio, sino también de sus futuras oportunidades de inversión u opciones de crecimiento" (p. 150). De esta forma, las decisiones de inversión de una empresa, al igual que las opciones financieras, se pueden valorar utilizando directamente la fórmula Black-Scholes. Asimismo, Kester (1984) sugiriere que los métodos tradicionales de valoración ignoran las flexibilidades de una empresa y sus oportunidades de crecimiento y se requiere de técnicas adecuadas que las incorporen. Los trabajos de Brennan y Schwartz (1985), McDonald y Siegel (1986), Dixit y Pindyck (1994), entre otros, contribuyen en este desarrollo al incorporar procesos estocásticos cuando modelan el valor presente del proyecto o alguno de sus componentes como activo subyacente.

Como resultado, el análisis de opciones reales (ROA, por su sigla en inglés) permite realizar una valoración de activos tangibles y proyectos de inversión más completa y supera las limitaciones del enfoque tradicional de valoración (FCD), al incorporar la flexibilidad e incertidumbre en la toma de decisiones estratégicas; además, su aplicación permite agregar valor a las oportunidades de inversión (Myers, 1977; Trigeorgis, 1991; Dixit y Pindyck, 1994).

Sin embargo, tomar decisiones estratégicas requiere también de un análisis profundo del funcionamiento del mercado, cuando los resultados de una empresa se ven afectados por la presión competitiva. Una empresa no está sola en el mercado y en cada decisión de inversión debe enfrentarse a la incertidumbre futura, en respuesta a la interacción estratégica de la competencia. Por ejemplo, si la empresa decide invertir ahora para desarrollar un nuevo producto o entrar en un nuevo mercado, es posible que esta obtenga una ventaja competitiva, pero si la competencia responde rápidamente, los resultados deseados se pueden contrarrestar, sobre todo cuando la competencia cuenta con gran poder de mercado.

Además, frente a cada inversión, toda empresa se enfrenta siempre al dilema de poner en marcha la inversión de forma inmediata buscando obtener una ventaja frente a la competencia, o esperar mejores condiciones en el mercado que le permitan desarrollar la inversión con menor incertidumbre. Si decide esperar un mejor escenario, la competencia puede anticiparse y la empresa puede perder la oportunidad, pero si esta adelanta la inversión sin contar con la información o el escenario adecuado, los resultados pueden ser desastrosos.

Por tanto, tomar una u otra decisión requiere de una compleja evaluación y ges-

---

[2] Un proceso de tipo MGB corresponde a un proceso estocástico en tiempo continuo, en el cual los incrementos se distribuyen de acuerdo con una distribución normal: $Z \sim N(0,1)$.

tión óptima de opciones estratégicas que solo puede abordarse con las herramientas analíticas adecuadas (Chevalier-Roignant y Trigeorgis, 2011). La evaluación inicial de invertir o no invertir, se puede adelantar mediante el ROA, pero este proceso también requiere de la toma de decisiones estratégicas en respuesta a las acciones de la competencia. Un análisis adecuado bajo esta perspectiva, exige una combinación del ROA y la teoría de juegos, y comprende un nuevo marco de análisis denominado "Juegos de opciones reales - ROG".

2. INCERTIDUMBRE, FLEXIBILIDAD Y OPCIONES REALES

El modelo de flujo de caja descontado (FCD) no logra valorar correctamente las oportunidades de inversión en escenarios de alta incertidumbre (Myers, 1977; Dixit y Pindyck, 1994), al asumir un enfoque determinístico que se refleja en una trayectoria fija de los flujos de caja libres proyectados (Smit y Trigeorgis, 2004), y al omitir la flexibilidad para tomar cursos alternativos en cada instante durante el periodo de vida del proyecto. Además, su carácter estático contradice las características propias de todo proyecto de inversión: si la valoración muestra un resultado favorable de acuerdo con los criterios de decisión establecidos[3], el modelo asume un escenario rígido para poner en marcha la inversión, es decir, luego de ejecutado el proyecto, este no se puede modificar.

Sin embargo, en la dinámica que caracteriza al mercado actual, la incertidumbre es cada día mayor y la flexibilidad se ha vuelto esencial a la hora de tomar decisiones estratégicas. La *incertidumbre* refleja la incapacidad para anticipar los acontecimientos futuros que pueden impactar los flujos de caja del proyecto, vía ingresos o costos, que dependen de los estados inciertos que caracterizan el real funcionamiento del mercado. De igual forma, el valor de la inversión[4], las tasas de interés u otros componentes del flujo pueden ser inciertos también, y realizar una valoración estática es inadecuado[5].

Por su parte, la *flexibilidad* es la condición que determina la existencia de las opciones reales en un proyecto de inversión (Romero, 2010) y con ello, la posibilidad de tomar cursos alternativos. Esta flexibilidad en la práctica corresponde a la capacidad de ajustarse, es decir, a la opción de modificar

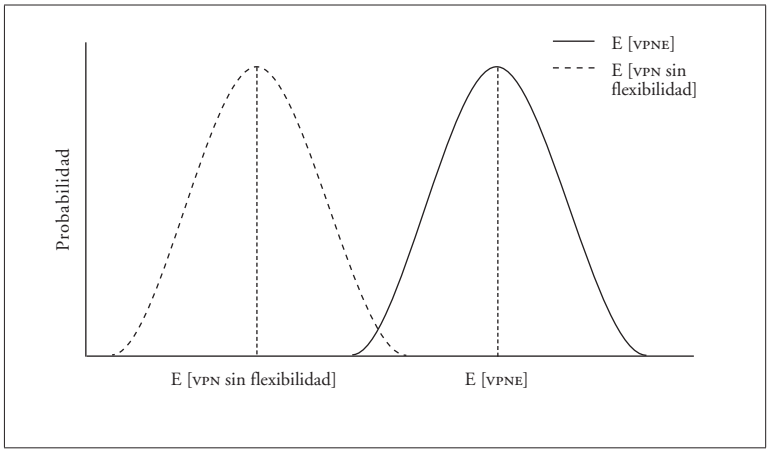
[3] Por ejemplo, el criterio del VPN indica que el proyecto de inversión debe implementarse si, como resultado de la valoración, se obtiene que el $VPN > 0$, es decir, la inversión debe llevarse a cabo cuando el valor presente esperado de los flujos de caja libres del proyecto de inversión es superior al monto de los recursos desembolsados.

[4] Como sucede en los proyectos de infraestructura.

[5] La estructuración de un proyecto de inversión requiere de un pronóstico de los flujos de caja libres que reflejan el resultado del proyecto, pero estas representan simples estimaciones de lo que se espera va a pasar en el futuro (Romero, 2010). Por tanto, no siempre se va a lograr el resultado deseado, dados los eventos inciertos que se pueden presentar y afectan al proyecto, ya sea positiva o negativamente; además, no siempre se cuenta con la información adecuada para ello. Al asumir un escenario probabilístico (escenarios posibles) se pueden obtener mejores (aproximaciones) del resultado real.

el curso del proyecto para responder a las nuevas condiciones del mercado. Según Trigeorgis (1993), la flexibilidad permite revisar las acciones futuras contingentes e introduce una asimetría en la distribución de probabilidad del valor presente, la cual expande el valor verdadero del proyecto en relación con el VPN (sin flexibilidad) y mejora su potencial de ganancias, al tiempo que limita las pérdidas.

FIGURA 1
Valor aportado por la opción real y VPNE



Fuente: Trigeorgis (1996).

Por tanto, el ROA ofrece un conjunto de alternativas para revisar o adaptar las decisiones futuras, en respuesta a los acontecimientos inciertos, y se convierte en una herramienta útil frente al contexto dinámico del mercado, lo cual permite incorporar valor a los proyectos de inversión. Trigeorgis (1996) sugiere que la valoración correcta requiere de una regla de Valor Presente Neto Expandido (VPNE) que corresponde a la agregación de valor originado por la flexibilidad e incertidumbre en las decisiones estratégicas sobre el valor obtenido en el VPN (sin flexibilidad). La estimación del VPNE se realiza de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$VPNE = VPN\ (sin\ flexibilidad) + Opción\ Real \quad (1)$$

Cabe aclarar que el ROA, aunque ofrece una herramienta transformadora para la valoración de proyectos, más allá de sustituir el método del FCD, entra a complementarlo.

2.1. Analogía con las opciones financieras

Una opción financiera representa el derecho, pero no la obligación, de comprar (o vender) un activo en algún momento dentro de un periodo de tiempo predeterminado y a un precio pactado. Esta misma idea se puede aplicar a los activos reales, en donde una empresa tiene la opcionalidad de tomar ciertas decisiones estratégicas a la hora de evaluar sus futuras oportunidades de inversión (Myers, 1977). Una empresa, por ejemplo, tiene el derecho pero no la obligación de invertir en un determinado proyecto y beneficiarse de sus flujos futuros si encuentra una oportunidad de inversión. Sin embargo, esta decisión no tiene que tomarse de inmediato, sino que puede esperar cierto periodo de tiempo hasta encontrar un escenario adecuado. Aquí, la empresa tiene una opción de diferir la inversión que solo ejercerá cuando las circunstancias sean favorables o rechazarla si no se presentan. La estructura de la opción de diferir es la misma de una opción financiera tipo *call* americana.

Esta misma estructura, también se identifica en las opciones de expansión para un proyecto cuando se observan buenos resultados en el mercado que se pueden aprovechar. Por el contrario, cuando las condiciones del mercado son desfavorables se puede tomar la decisión de reducir temporalmente la escala de producción o abandonar el proyecto cuando lo amerite. Su estructura se parece a una opción tipo *put* americana.

En la valoración de una opción real, Trigeorgis (1993) recomienda una analogía que permite aplicar los modelos de las opciones financieras a los proyectos de inversión. La tabla 1 presenta la similitud en los parámetros.

TABLA 1
Analogía entre las opciones reales y financieras

Variables	Opción financiera	Opción real
Precio del activo subyacente (S)	Precio de las acciones	Valor presente de los flujos futuros de caja libres del proyecto
Precio de ejercicio (K)	Precio de compra de las acciones	Costo de inversión
Vencimiento (T)	Tiempo de expiración de la opción	Tiempo hasta el vencimiento de la oportunidad de inversión
Tasa libre de riesgo (rf)	Tasa de interés libre de riesgo	Tasa de interés libre de riesgo
Volatilidad (σ)	Variación en los rendimientos de las acciones	Variación de los rendimientos logarítmicos del valor presente del proyecto

Fuente: Trigeorgis (1993).

A pesar de la similitud entre las opciones reales y las opciones financieras, Trigeorgis (1993) advierte que su aplicación implica una complejidad analítica mayor: mientras la valoración de opciones financieras requiere la existencia de un "mercado líquido" para los activos, este supuesto no se cumple para las opciones reales ya que estas no cuentan con un mercado.

Sin embargo, su valoración sigue siendo aplicable, siempre y cuando sea posible encontrar una estimación fiable de su valor. Para lograr esta aplicación, Copeland y Antikarov (2001) presentan un enfoque denominado Marketed Asset Disclaimer (MAD), que está soportado en la prueba de Samuelson (1965) sobre las propiedades estocásticas de las variables aleatorias que caracterizan a los flujos de caja libres futuros del proyecto subyacente. Mediante los supuestos MAD, los autores recomiendan tomar el valor presente *sin flexibilidad* (VPN estático) como la mejor estimación objetiva del proyecto, asumiendo que este cuenta con un mercado, lo cual permite adoptar una estructura similar a la valoración de opciones financieras.

Ahora, mediante la analogía se asume que el valor presente de los flujos de caja libres futuros del proyecto (V_0) incorpora cambios en el tiempo, siguiendo aproximadamente un proceso de difusión característico del movimiento geométrico browniano (MGB), por tanto, los cambios instantáneos de su valor en el tiempo están dados por:

$$dV = \mu V\, dt + \sigma V\, dW \qquad (2)$$

donde:

μ = tasa esperada de retorno instantánea del valor presente de los flujos de caja libres del proyecto (V)

σ = volatilidad

W = proceso estándar de Wiener

Una característica de este modelo es que asume μ y σ constantes y conocidas en el tiempo y V no puede tomar valores negativos. Además, la volatilidad (σ) corresponde al parámetro que recoge el efecto conjunto de todas las fuentes de incertidumbre que impulsan el valor futuro del proyecto y se estima como la desviación estándar (tasa de dispersión) de su rendimiento logarítmico[6] de un periodo de tiempo a otro.

Aunque el enfoque de valoración de opciones financieras se fundamenta en la existencia de un portafolio replicante, los autores argumentan que, mediante los supuestos anteriores, es posible desarrollar la valoración sin garantizar la existencia de este portafolio. Además, reconocen que este enfoque de valoración, aunque es más débil[7], incorpora supuestos apropiados que han sido ampliamente aceptados.

---

[6] La estimación de la volatilidad representa la principal dificultad en la aplicación del enfoque de valoración de opciones reales. Los proyectos de inversión generalmente cuentan con múltiples fuentes de incertidumbre que afectan los flujos de caja libres esperados, por lo que todas estas deben quedar representadas en su estimación (Copeland, 2010).

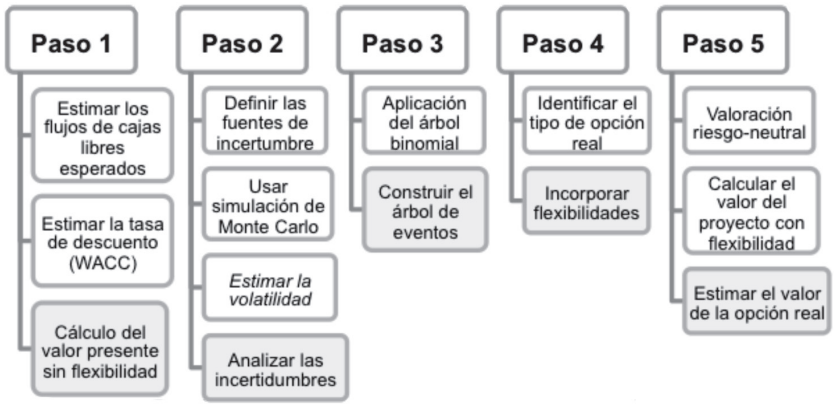
[7] Se debe tener presente que la exactitud de los cálculos en una opción real puede ser significativamente menor a los resultados obtenidos en la valoración de opciones financieras, dada la propia naturaleza y características de los proyectos de inversión.

2.2. Valoración de las oportunidades de inversión con opciones reales

Al asumir un proceso de difusión del tipo MGB como modelo de comportamiento del valor presente del proyecto (*V*), según Copeland y Antikarov (2001), se identifica una ventaja que permite contemplar una aproximación en tiempo discreto para utilizar el modelo binomial de valoración propuesto por Cox, Ross y Rubinstein (1979). En su aplicación, se facilita la valoración del proyecto que incorpora una opción real una vez se resuelve el problema de estimación de los parámetros.

La valoración se desarrolla siguiendo la metodología propuesta por Copeland y Antikarov (2001 y 2005), en un proceso que consta de cinco pasos y combina el uso de la simulación de Monte Carlo con el modelo binomial bajo el enfoque de valoración riego-neutral, como se muestra en la figura 2.

FIGURA 2
Pasos en el desarrollo del modelo de valoración



Fuente: elaboración propia, basada en Copeland y Antikarov (2005).

Paso 1. El modelo inicia con la *estimación del VPN sin flexibilidad*, en el marco de la técnica tradicional, usando como tasa de descuento el costo promedio ponderado del capital[8] (WACC, por su sigla en inglés). Es necesario recordar que el criterio del VPN sugiere que un proyecto de inversión es viable si

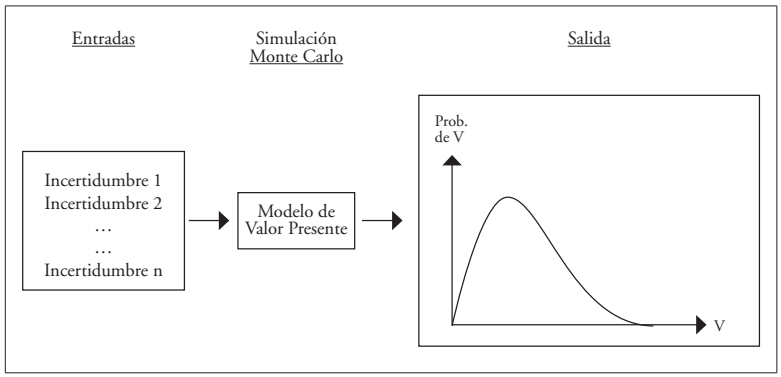
[8] La elección de la tasa de descuento presenta discusiones en torno al carácter discrecional que tiene el

el VPN>*0*; de lo contrario, se rechaza. Sin embargo, este criterio de decisión involucra una estrategia de inversión rígida dado que los planes de inversión no se modifican una vez el proyecto se pone en marcha, es decir, la inversión es irreversible.

Paso 2. Estimación de la volatilidad usando simulación de Monte Carlo. Las múltiples fuentes de incertidumbre como: ingresos, costos, tamaño del proyecto, entre otras, son caracterizadas por distribuciones de probabilidad hipotéticas que representan su aleatoriedad y proporcionan las entradas del modelo para implementar la técnica de Monte Carlo y, con ello, estimar los parámetros del proceso estocástico[9]. En su aplicación, el efecto conjunto de todas las fuentes de incertidumbre se reduce a una única estimación que es captada por la desviación estándar de los rendimientos logarítmicos del valor presente del proyecto. La implementación de este proceso se ve representada en la figura 3.

FIGURA 3

Implementación de la técnica de simulación de Monte Carlo



Fuente: Copeland y Antikarov (2001).

estructurador del proyecto en su determinación, donde algunos autores sugieren que su uso no es apropiado (Brandao, Dyer y Han, 2005).

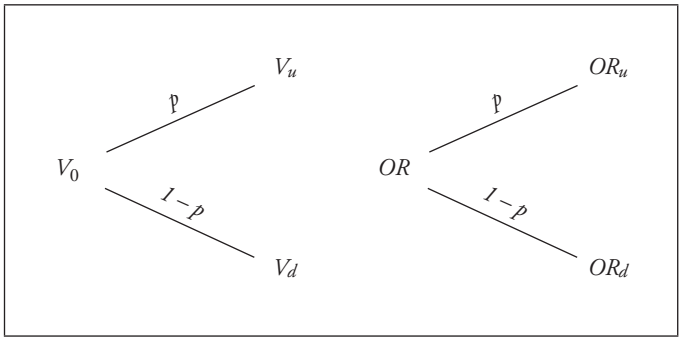
[9] La técnica de simulación de Monte Carlo ofrece una salida muy práctica y flexible en el proceso de estimación, siempre que sea posible construir un modelo de Monte Carlo que caracterice al proyecto de inversión. Copeland y Antikarov (2001) recomiendan calcular los rendimientos logarítmicos (z) del valor presente de los flujos de caja libres del proyecto entre dos instantes de tiempo (t = 0 y t = 1, por ejemplo) a partir de muestras simuladas utilizando:

$$z = \ln\left(V_1 / V_0\right)$$

Sin embargo, su modelo de estimación ha sido objeto de múltiples críticas.

Paso 3. Construcción del árbol binomial y árbol de eventos. La estimación de la volatilidad en el paso anterior proporciona el parámetro requerido para encontrar los factores *u, d* y las probabilidades riesgo-neutral *p* y *1-p* que conjuntamente caracterizan el comportamiento del valor presente de los flujos de caja libres en el periodo de proyección, cuando este adquiere un mayor o menor valor, *Vu* y *Vd*, respectivamente, representando así todos los posibles escenarios futuros en tiempo discreto.

FIGURA 4
Modelo binomial de valoración para un periodo



Fuente: elaboración propia, basada en Cox *et al.* (1979).

El valor del proyecto en el momento T, se puede extender hacia arriba hasta el valor V_u con un factor de crecimiento *u*, o hacia abajo hasta el valor V_d con un factor de decrecimiento *d*. Los factores *u* y *d* están dados por:

$$u = e^{\sigma\sqrt{T}} \qquad (3a)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{T}} \qquad (3b)$$

donde σ corresponde a la volatilidad. Así mismo, las probabilidades riesgo-neutral *p* y (*1-p*), se obtienen mediante las expresiones:

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \text{ y} \qquad (4a)$$

$$(1-p) = \frac{u - e^{rT}}{u - d} \qquad (4b)$$

En ausencia de oportunidades de arbitraje, se debe garantizar que $u > e^{rT} > d$, donde r es la tasa de interés libre de riesgo. Si esta condición se cumple, es posible encontrar el valor de la opción real (OR). Esta puede tomar también dos valores: OR_u si el subyacente al vencimiento es V_u, o OR_d si el subyacente es V_d. Incorporando el precio del ejercicio (K) al vencimiento, se tiene:

$$OR_u = \max[V_u - K; 0] \qquad (5a)$$

$$OR_d = \max[V_d - K; 0] \qquad (5b)$$

Al descontar hasta llegar a la fecha de valoración (t = 0), el valor de la opción (OR) está dado por:

$$OR = [p\ OR_u + (1-p)\ OR_d\ ]e^{rT} \qquad (6)$$

Además, el modelo se puede extender a un periodo de tiempo determinado T, con N intervalos de longitud $\Delta t = T/N$. Donde Δt representa el paso en el tiempo cuando el valor presente está cambiando discretamente de un intervalo a otro. La ventaja de un árbol binomial que se extiende con N intervalos es que representa todas las posibles trayectorias en tiempo discreto que puede tomar el valor presente del proyecto. Además, la adopción del modelo binomial, como indican Copeland y Tufano (2004), captura con eficacia la complejidad y el carácter iterativo de decisiones gerenciales y sus contingencias.

Paso 4. Incorporar la opcionalidad en la toma de decisiones de inversión. Una vez que se lleva a cabo un proyecto, la empresa cuenta con la flexibilidad durante su vida para modificarlo en respuesta a los escenarios inciertos que se presentan. La empresa puede contemplar, entre otras alternativas, la posibilidad de: i) expandir, ii) contraer, iii) abandonar, cuando las condiciones del mercado cambian o se incorpora mayor información. Estas decisiones representan opciones reales simples.

Opción real de expandir

Si la demanda resulta ser mayor de lo esperado, la empresa puede ampliar la capacidad de producción en una proporción "η", realizando una inversión determinada (K), necesaria para construir la capacidad de planta adicional (o ampliar la escala), la cual representa el precio de ejercicio. La opción de expansión es análoga a una opción *call* americana, que puede ejercerse en un periodo de tiempo determinado, cuando las condiciones del mercado mejoran o se identifican oportunidades de crecimiento. Al vencimiento (en T), el valor del proyecto o empresa, junto con el valor aportado por la opción real (*pay-off*), está dado por:

$$OR_{exp} = \max[V_t;\ (1+\eta)V_t - K] \qquad (7)$$

El valor adicional que provee esta estrategia se identifica en las sinergias que se producen a través de las economías de escala o alcance (Smit, 2003) y el aumento del tamaño de la empresa consolidada[10].

Opción real de contracción

En un escenario contrario al anterior, la empresa puede encontrar incentivos para reducir su capacidad de producción en el orden de un factor de contracción "γ", cuando se identifican efectos no deseados en el mercado. En este caso, la empresa decide reducir su escala hasta cierto nivel para garantizar

[10] Además, Smit (2003) menciona que regularmente en estas consolidaciones se identifica un efecto de apalancamiento financiero: la empresa adquiriente normalmente utiliza un monto significativo de deuda para financiar la adquisición y esto, además de crear escudos fiscales valiosos, refuerza los incentivos de gestión para mejorar la eficiencia y el flujo de caja.

su permanencia, teniendo en cuenta, por ejemplo, una relación costo/beneficio. Una opción de contracción es muy útil cuando los resultados de la apertura de una nueva marca, producto o línea no alcanzan el grado de aceptación o las expectativas esperadas, y reducir su capacidad le genera un ahorro en costos. Esta puede verse como una opción *put* americana, con un valor de ejercicio igual al ahorro de los costos potenciales (N) que puede lograr. Su *pay-off* es:

$$OR_{cont} = \max[V_t; (1-\gamma)V_t + N] \quad (8)$$

Opción real de abandonar

Cuando la empresa no genera los flujos de caja libres suficientes para garantizar la operatividad del proyecto, la mejor decisión es abandonarlo. En este caso, se compara resultado del valor actual del proyecto con un determinado valor de salvamento (S). Su estructura se parece a una opción *put* americana, donde su *pay-off* es:

$$OR_{cont} = \max[V_t; S] \quad (9)$$

Si $S > V_t$, la opción se ejerce. En este caso, es más atractivo liquidar el proyecto y vender los activos al valor del mercado que continuar en él. Además, en los nodos del árbol se identifican las decisiones óptimas para crear el árbol de decisiones de acuerdo con las opciones reales identificadas.

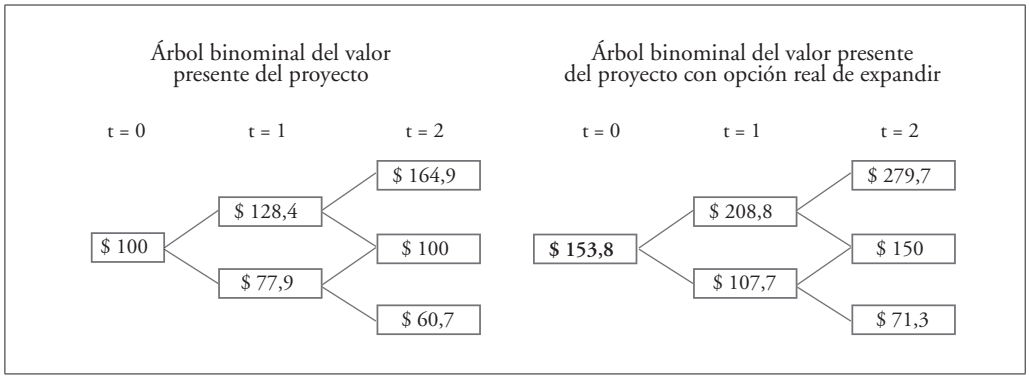
Paso 5. Valoración riesgo neutral. Finalmente, en el marco de aplicación del modelo binomial se utiliza el principio de inducción hacia atrás para encontrar el valor presente ampliado del proyecto (con opción real) en cada uno de los nodos del árbol y se descuenta en cada paso utilizando la tasa de interés libre de riesgo (r) hasta llegar al instante t = 0. El valor resultante representa el VPNE, en el que se identifica el valor aportado por la opción real al VPN sin flexibilidad del proyecto de inversión.

2.3. Ejemplo para una opción real de expansión

Consideremos una empresa que cuenta con la posibilidad de aumentar su grado de participación en el mercado, es decir, cuenta con una *opción real para expandir*. Si la empresa identifica las condiciones adecuadas en el mercado durante un periodo de tiempo determinado, como por ejemplo, un aumento de la demanda (mayor a lo esperado), puede ampliar su capacidad de producción en una proporción "η = 100%", para lo cual requiere desembolsar recursos por un valor determinado (K = $ 50 millones), y aumentar con ello su valor presente que asciende actualmente a VP = $ 100 millones.

Esta opción de expansión se valora de forma análoga a una opción *call* americana, que puede ejercerse en los próximos dos años (vencimiento de T = 2). Además, si se asume una tasa libre de riesgo del 4% en el mercado, y una volatilidad del valor presente del proyecto de $\sigma = 25\,\%$, se encuentra que el valor aportado por la opción real se determina como: $OR_{exp} = \max[V_t; (1+\eta)V_t - K]$

y aplicando el modelo binomial de valoración se tiene:



Como resultado, se encuentra que el valor aportado por la opción real a la empresa es de $ 53,8 millones. Este valor se encuentra en función de la incertidumbre a la que se enfrenta y, mientras mayor sea esta incertidumbre para la empresa, más aumenta el valor aportado por la opción real (flexibilidad).

3. TEORÍA DE JUEGOS Y DECISIONES ESTRATÉGICAS

El ROA permite la incorporación de la incertidumbre en la valoración al contemplar su dinámica estocástica, pero omite las interacciones estratégicas que afectan las decisiones de inversión en el mercado. Las empresas generalmente suelen responder de manera estratégica a las acciones de la competencia[11], producto de la constante presión competitiva. En este contexto, el conocimiento que tiene cada una del comportamiento probable (reacción) de la competencia, mediante la anticipación de su respuesta, se vuelve fundamental y puede mejorar la capacidad para el diseño de mejores estrategias (Smit y Trigeorgis, 2004). Por ejemplo, en las decisiones de inversión, cada empresa es consciente de que sus decisiones afectan el valor de las oportunidades de inversión de otras empresas.

La incorporación de este tipo de comportamientos requiere ampliar el análisis en la valoración, desarrollado en la sección anterior, y los principios de la teoría de juegos (GT, por su sigla en inglés) se vuelven ahora fundamentales. En una extensión al enfoque de valoración anterior, se incorpora el análisis que provee la teoría de juegos. Sin embargo, antes de presentar la integración de estos dos enfoques, se presenta primero el desarrollo de la teoría de juegos estándar.

[11] Un escenario de este tipo caracteriza una estructura de mercado oligopólica en la que cada empresa puede verse afectada por las decisiones de las demás.

3.1. Estructura de un juego estándar

La GT estudia los resultados que surgen de las interacciones estratégicas entre jugadores racionales, y desarrolla un marco de análisis donde cada jugador reconoce que sus acciones afectan a los demás y, por tanto, sus decisiones dependen de lo que este espera que van a decidir los demás. Cada juego debe contar con los siguientes elementos:

1. Un conjunto finito de jugadores:

$$N = \{1, ..., n\}$$

2. Un conjunto finito de estrategias (C) en el juego para cada jugador $i \in N$:

$$C_i = \{c_1, \ldots, c_n\}$$

3. Un orden en las decisiones de los jugadores. Dependiendo de la naturaleza del juego, existen ciertas formas de aleatoriedad en la toma de decisiones, regularmente en estas se identifica una secuencia o simultaneidad. Además, el número total de acciones de cada jugador se desarrolla en un número finito de etapas. La secuencia de acciones posibles para cada jugador se traduce en un resultado determinado.

De igual forma, cada jugador cuenta con un conjunto de información (toda la información disponible) en cada nodo de decisión, y basándose en esta información, decide cuál es la acción que le proporciona el más alto pago (o valor). Estas acciones representan decisiones racionales (óptimas) que buscan la maximización de valor para cada empresa y reciben el nombre de "estrategias puras".

4. Una función de pagos (u_i), que ayuda a asignar un pago numérico luego de que el juego termina, e identifica la ganancia o pérdida de cada jugador.

Al representar la función de pagos se debe examinar cada una de las posibles combinaciones de estrategias disponibles de los jugadores y especificar qué le sucede a cada jugador en cada caso, asignándole cierto valor. Además, mediante la identificación de los jugadores, sus estrategias y funciones de pago, se puede definir formalmente un juego en forma estratégica mediante una matriz. Esta matriz comprende la representación más típica de un juego y contiene los pagos de cada jugador para las posibles combinaciones de estrategias (Monsalve y Arévalo, 2005).

Finalmente, cada jugador tiene conocimiento completo (simétrico) de las reglas del juego y de los jugadores. Sin embargo, dada la naturaleza de las decisiones por tomar, este puede o no tener conocimiento completo de las decisiones del rival. Este último escenario permite contemplar un conjunto de extensiones que se han desarrollado recientemente para representar juegos más complejos.

3.2. Reglas de solución del juego y equilibrio de Nash

La teoría de juegos incorpora una noción de "equilibrio" que caracteriza el comportamiento de un jugador racional cuando este toma decisiones óptimas, en respuesta a las posibles acciones de los demás. El conjunto de acciones que un jugador elige forma su mejor estrategia y, al asumir un comportamiento racional, cada jugador escoge sus

acciones sobre la base de criterios de coherencia interna (Smit y Trigeorgis, 2004), en el sentido de que cada uno selecciona su mejor estrategia en respuesta a las decisiones de los demás.

El conjunto de estrategias en el que ningún jugador puede encontrar un mejor resultado cambiando su estrategia, representa un equilibrio de Nash. Sin embargo, encontrar este equilibrio depende de la forma como se desarrollen las acciones de los jugadores, es decir, si estas se realizan de forma secuencial o simultánea. Para cada una se identifican reglas que ayudan a encontrar la solución del juego, mediante diferentes métodos que se presentan a continuación:

a. Estrategias dominantes. Cuando un jugador puede contar con una estrategia que supera a todas las demás, independientemente de lo que haga el otro jugador. Esta se llama *estrategia dominante*, es decir, un jugador no puede mejorar su pago o ganancia eligiendo cualquier otra estrategia. Si la estrategia C_i, por ejemplo, domina a C_i'se tiene entonces que: $u_i\,(C_i) > u_i\,(C_i')$, y el jugador i escoge como su mejor opción la estrategia que le representa un pago $u_i\,(C_i)$.

b. Eliminación iterativa de estrategias dominadas. La presencia de estrategias dominantes ayuda a descartar aquellas que están siendo dominadas en un proceso de eliminación paso a paso. El proceso de eliminación ayuda a un jugador a identificar las estrategias dominadas para otros jugadores permitiendo la búsqueda de estrategias dominantes para todos, hasta llegar a una única combinación que represente una solución para el juego. Sin embargo, no todos los juegos se pueden resolver a través de la eliminación de las estrategias dominadas.

c. Equilibrio de Nash en estrategias puras. El concepto del equilibrio de Nash está asociado al concepto de mejor respuesta frente a las estrategias de los demás jugadores, y representa una ventaja al reducir a una forma más simple el método de solución anterior, incluso cuando no hay estrategias dominantes. Su aplicación se realiza mediante la identificación y comparación para escoger los mejores resultados en cada estrategia, usando un razonamiento lógico. Sin embargo, puede existir más de un equilibrio de Nash en un juego o, incluso, este puede no existir en estrategias puras.

d. Equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Cuando no es posible identificar un equilibrio de Nash en estrategias puras, pero las acciones óptimas dependen de la probabilidad de ocurrencia de ciertos eventos, se puede obtener una solución en estrategias mixtas (Smit y Trigeorgis, 2004). Mediante una estrategia mixta, cada jugador asigna probabilidades a sus acciones y, en el equilibrio mixto, los demás jugadores son indiferentes entre estas acciones.

e. Método de inducción hacia atrás. Un juego secuencial se caracteriza porque un jugador escoge primero y, de acuerdo con su elección, el otro jugador elige su mejor respuesta. Esto indica que el comportamiento que adopte el segundo jugador está influenciado por la

decisión del primero. Por tanto, el jugador que inicia debe anticipar las decisiones del otro y utilizar esa información para escoger aquella estrategia que le genere el mejor resultado futuro posible. Este tipo de juegos, por tanto, debe ser resuelto mediante el método de inducción hacia atrás, en el que se analiza la información disponible al final del juego y se va devolviendo hasta llegar a la información del inicio, para identificar la(s) mejor(es) estrategias.

f. Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Una aplicación completa del principio de solución anterior para los juegos de tipo secuencial requiere de un refinamiento del concepto de equilibrio de Nash, dado que estos generalmente se caracterizan por la presencia de pequeños subjuegos dentro de un juego total que se desarrolla en múltiples etapas.

En cada subjuego, las estrategias de cada uno de los jugadores se fundamentan en la identificación completa de la información sobre las acciones de los demás y, por tanto, se deben descartar aquellas acciones no creíbles, esto implica que la perfección en subjuegos solo se utiliza con juegos de información completa. En este caso, el proceso de inducción hacia atrás se debe utilizar en presencia solo de aquellas acciones creíbles, descartando las demás. De acuerdo con Selten (1974), un conjunto de estrategias es un equilibrio perfecto en subjuegos si genera un equilibrio de Nash en cada subjuego del juego original, es decir, si los jugadores encuentran una estrategia dentro de un subjuego que representa un equilibrio de Nash, entonces ellos eligen un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

4. INTEGRACIÓN DE LA TEORÍA DE JUEGOS Y ANÁLISIS DE OPCIONES REALES: JUEGOS DE OPCIONES REALES

El diseño de estrategias óptimas y la agregación de valor en los proyectos de inversión que presentan algún grado de incertidumbre, representa una contribución importante del ROA al enfoque de valoración. Sin embargo, el análisis de valoración aún no está completo, y las estrategias de inversión deben tener en cuenta la interacción competitiva en el mercado. Cuando el desempeño de una empresa se ve afectado por las acciones de la competencia, se requiere cambiar el criterio de inversión óptima (Smit, 2003) y la integración de la teoría de juegos ayuda a resolver el problema.

La integración de los conceptos de la teoría de juegos y el análisis de opciones reales, permite obtener una evaluación completa del valor de la flexibilidad e incertidumbre en la toma de decisiones estratégicas sobre oportunidades de inversión en un mercado competitivo, partiendo de un nuevo marco de análisis denominado "juegos de opciones reales" o ROG (por su sigla en inglés), en el que cada empresa tiene en cuenta implícitamente las reacciones de las demás ante sus propias decisiones.

Este nuevo enfoque nace desde inicios de la década de los noventa, gracias a los trabajos de Smets (1991), Smit y Ankum (1993) y Dixit y Pindyck (1994). Recientemente, se

ha extendido su aplicación a muchos campos y se encuentran grandes contribuciones en Grenadier (2002), Smit y Trigeorgis (2004) y Chevalier-Roignant y Trigeorgis (2011), entre otros.

Un ROG permite una evaluación completa del valor de la flexibilidad e incertidumbre en una inversión, ante la toma de decisiones estratégicas en un entorno competitivo. De acuerdo con Smit y Trigeorgis (2004), la utilidad de la teoría de juegos en el análisis de las decisiones estratégicas de inversión, se identifica en:

> i. ayuda a reducir un problema estratégico complejo a una estructura analítica sencilla que consta de pocas dimensiones y,
>
> ii. abarca un concepto de solución que puede ayudar en la comprensión o predecir cómo se comportarán los competidores, y también proporciona una estrategia de equilibrio y los valores de las decisiones estratégicas.

Sin embargo, está aplicación, a diferencia de la teoría de juegos estándar, suele ser más compleja, ya que cada empresa tiene que anticipar las posibles acciones y tiempos disponibles para sus competidores, situación que no siempre es posible. Por ejemplo, cuando se evalúan decisiones de inversión para un nuevo producto de tipo tecnológico, o al entrar en un nuevo mercado, una empresa no cuenta con la suficiente información o conocimiento para apoyar la toma de decisiones y la estimación de sus beneficios se vuelve confusa.

4.1. Características de los "juegos de opciones reales"

Un juego de opción real – ROG, representa una herramienta de análisis adecuada para una empresa que tiene una opción real, por ejemplo, para invertir en un proyecto específico cuando se enfrenta a la competencia. A diferencia de los juegos estándar, que se caracterizan por ser determinísticos, un ROG está caracterizado por subyacentes estocásticos (Smit y Trigeorgis, 2004), lo cual cambia algunos principios y reglas, bajo las cuales se determina el equilibrio de Nash. En un tratamiento análogo, de acuerdo con Smit (2002) y Smit y Trigeorgis (2004), un ROG se caracteriza por:

1. Participa un conjunto finito de jugadores: $N = \{1,\ldots,n\}$. Estos jugadores corresponden a las empresas que encuentran oportunidades de inversión en el mercado o simplemente se enfrentan a la competencia.

2. Cada empresa (jugador) presenta un conjunto finito de estrategias (C_i). A diferencia de un juego estándar, las acciones de cada jugador involucran incertidumbre y sus decisiones no solo dependen de la creencia acerca de las estrategias de los competidores, sino también de eventos exógenos o "estados inciertos" que caracterizan al mercado.

3. El vencimiento de las oportunidades de inversión es finito y las decisiones se toman en tiempo continuo. Sin embargo, se puede abordar un análisis en tiempo discreto (intervalos de tiempo) para la toma de decisiones.

En este caso, las empresas pueden elegir entre un conjunto de diferentes acciones en determinados nodos de decisión que hacen parte de un árbol de eventos y, al igual que en los juegos estándar, se pueden tomar decisiones de dos formas: secuencial o simultáneamente[12].

Adicionalmente, la información disponible para cada jugador puede generar un marco de análisis complejo cuando esta no es completa. Por ejemplo, en los juegos con información completa, su estructura es conocida al igual que todas las acciones de los jugadores y los posibles resultados, pero en un escenario de información asimétrica, una empresa no siempre puede anticipar correctamente las acciones de la competencia y los resultados o beneficios del juego pueden ser inciertos (Smit y Trigeorgis, 2004). Además, en algunos casos, las empresas no llegan a conocer completamente el entorno en el que están jugando, como suele pasar en los proyectos de inversión en I+D.

4. Una función de pagos (u_i), que ayuda a asignar un pago numérico, luego de que el juego termina, e identifica la ganancia o pérdida de cada empresa.

Además, se requieren las siguientes condiciones para el desarrollo del juego:

– El juego representa la toma de decisiones para un único proyecto de inversión.

– Las empresas son neutrales al riego.

– El activo subyacente evoluciona estocásticamente y no existen fricciones en el mercado, ni restricciones financieras para la empresa.

– No hay cooperación entre las empresas participantes del juego, caracterizando así un marco de análisis de juegos *no cooperativos*.

4.2. Reglas de solución para un ROG

A diferencia de los juegos estándar, la solución de un ROG requiere de reglas adicionales, producto de la toma de decisiones bajo incertidumbre. El equilibrio en un juego de varias etapas (secuencial) se encuentra mediante el método de inducción hacia atrás, pasando por cada nodo de elección estratégica. Este mismo principio se aplica en la valoración de una opción real, al usar el árbol binomial mediante un procedimiento de valoración riesgo-neutral. En la solución, el valor de la opción estratégica en cada rama del árbol binomial corresponde al resultado de un equilibrio en un subjuego de inversión que representa los posibles beneficios para cada empresa.

La integración de los dos enfoques permite valorar las estrategias en un contexto competitivo de una forma más completa y consistente, al presentarse un vínculo entre los dos enfoques. La evaluación de una oportunidad de inversión en un contexto estratégico, y la determinación real de su valor, ahora supone una descripción de la estructura de un juego de opción real, en el que se identifican dos fuentes de valor para la empresa: i) el valor que aporta la opción real, ii) el valor que proporciona la interac-

[12] Cabe aclarar que algunos juegos en la vida real pueden desarrollarse con una combinación de acciones simultáneas y secuenciales.

ción estratégica con los competidores en un entorno de decisiones interdependientes, el cual puede representar una pérdida relativa de valor (Smit, 2003).

Por tal razón, este análisis se debe abordar desde un marco de equilibrio cuidadoso, producto de un *trade-off* que se puede presentar entre estas dos fuentes de valor: flexibilidad e inversión inmediata. Toda empresa que cuente con una oportunidad de inversión en un entorno competitivo, por ejemplo, el desarrollo de un nuevo producto, se enfrenta siempre al dilema de invertir ahora (inmediato), buscando encontrar una ventaja competitiva sobre sus rivales, retrasar la inversión para adquirir más información o esperar mejores condiciones en el mercado. Si invierte ahora, la empresa puede tener la ventaja de anticiparse, pero en este escenario puede verse enfrentada a la incertidumbre que caracteriza las fluctuaciones del mercado, como demanda, precios o costos de los insumos, los cuales pueden revertir el resultado al afectar negativamente los flujos.

En contraste, si espera mejores condiciones puede evitar esta incertidumbre y, con ello, podrá desarrollar una inversión más segura; sin embargo, la competencia puede adelantarse y desarrollar la misma inversión perdiendo así la ventaja competitiva que podría alcanzar.

Chevalier-Roignant y Trigeorgis (2011), muestran que en un ROG, a diferencia de una opción real, no siempre es deseable *mantener una opción abierta (esperar)*, por ejemplo, cuando se desea esperar para invertir en un nuevo producto. En muchas ocasiones, la competencia puede sacar ventaja al ejercer su opción real de inversión primero[13]. De esta forma, anticipar la inversión comprende un caso simple de este tipo de juegos de estrategia en contra de la competencia.

Una solución para este tipo de juegos requiere, por tanto, ponderar los resultados relativos de la flexibilidad frente a la interacción competitiva y proporcionar un estado de equilibrio entre los dos. De esta forma, se logra dar una solución al juego. En este marco de aplicación, se requiere utilizar la extensión de Smit y Trigeorgis (2012) al análisis propuesto por Fudenberg y Tirole (1985), cuando se evalúan estrategias de inversión en condiciones de incertidumbre frente a la reacción de empresas competidoras. Bajo esta propuesta, la incertidumbre de la demanda se modela a través del árbol binomial, de acuerdo con el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979).

Por su parte, la incertidumbre que surge de las interacciones estratégicas en cada nodo terminal del árbol, se modela en forma estratégica mediante matrices utilizando los principios de la teoría de juegos. Aquí los valores terminales identifican un pago de equilibrio que reemplaza los pagos de cada nodo respectivo en el árbol binomial. Un resultado *ex ante*, basado en el marco análisis de Fudenberg y Tirole (1985), sugiere que la presencia de empresas competidoras

[13] Estas conductas están muy relacionadas con la ventaja de mover primero en el modelo de oligopolio de Stackelberg: quien mueve primero toma el papel de "líder" y saca el mayor provecho de su inversión en el mercado.

reduce el valor de la flexibilidad estratégica (esperar mejores condiciones para invertir), el cual se puede representar mediante un equilibrio de Nash perfecto en un subjuego dinámico.

4.3. Estrategia de inversión: juego de una opción real de expansión

El ejemplo presentado en la sección 2 de una opción real de expansión, representa un caso sencillo en el que se asume que no existen empresas rivales en el mercado. Sin embargo, esto no siempre es así. Consideramos ahora, un juego en el que participan dos empresas (jugadores): empresa A y empresa B. La empresa A cuenta actualmente con un valor presente total de VP_A = $100 millones y planea hacer una inversión adicional por un valor de K = $50 millones, con el propósito de tener una mayor participación en el mercado. Esta oportunidad de inversión presenta, como se mencionó atrás, una estructura similar a una opción de compra, y el juego, por simplicidad, se puede desarrollar de forma simultánea.

La flexibilidad que provee esta estrategia de inversión permite duplicar el valor de la empresa ante la posibilidad de alterar las decisiones de inversión futuras, cuando las condiciones de mercado son favorables, pero no se debe olvidar el impacto estratégico de las interacciones competitivas. Si consideramos una empresa competidora (empresa B) que presenta un valor presente total, por ejemplo, similar a la empresa A e igual a VP_B = $100 millones, y que se encuentra en una puja competitiva con A, entonces el efecto sobre el valor que proporciona la flexibilidad se ve reducido.

En medio de esta interacción, la valoración completa requiere primero cuantificar el valor de la flexibilidad para cada uno de forma separada, utilizando el enfoque de valoración de opciones reales y, luego, se utilizan los principios de la teoría de juegos para evaluar el posible efecto de las respuestas de los competidores en el valor final de la inversión, frente a cada estrategia que adopte una empresa.

En el juego, las empresas cuentan con dos estrategias: i) ejecutar una inversión de forma inmediata, con el propósito de sacar una ventaja competitiva frente a la otra, o ii) simplemente esperar un periodo de tiempo adicional mientras encuentran mejores condiciones. En este segundo escenario se puede evaluar una opción real de aplazar, o un juego de dos etapas; sin embargo, por simplicidad asumiremos un juego sencillo que se desarrolla de forma simultánea.

Dadas las alternativas que presenta cada una, se encuentran los siguientes cuatro escenarios de inversión, con los respectivos resultados para cada una (pagos):

> i) Si las dos empresas invierten ahora (al mismo tiempo) comparten el valor total que proporciona la expansión: $53,8 millones, es decir, a cada una le corresponde un valor de $53,8 * ½ = $26,9 millones, representando así sus beneficios ($26,9, $26,9).
>
> ii) y iii) Si una empresa (A o B) se adelanta e invierte primero, mientras la otra

espera, es decir, se adelanta a la competencia, se apropia del valor presente total ($53,8 millones), mientras la otra no obtiene beneficio alguno ($0). Esto resulta en unos pagos de ($53,8, $0) o ($0, $53,8), respectivamente.

iv) Si las dos empresas deciden esperar, ambas pueden perder la oportunidad de inversión, lo cual les implica un resultado de $0 ($0, $0).

La siguiente matriz de pagos refleja de forma normal las estrategias y los pagos para cada jugador:

		Empresa B	
		Esperar	**Invertir**
Empresa A	**Esperar**	($ 0, $ 0)	($ 0, $ 53,8)
	Invertir	($53,8, $ 0)	($ 26,9, $ 26,9)

Utilizando las reglas y los métodos de solución descritos en la sección 3.2, se encuentra que las dos empresas (A y B) presentan una estrategia dominante, independientemente de la decisión de la otra. La ganancia para la empresa A, de realizar una inversión inmediata, excede la ganancia de esperar: $53,8 > $0 y $26,9 > $0; lo mismo sucede con la empresa B. Por tanto, invertir de forma inmediata, le representa la mejor elección a las dos empresas. Si se utiliza el mecanismo de eliminación iterativa se llega a una solución del juego, en la que cada empresa obtiene como resultado $26,9 millones ($26,9; $26,9). De igual forma, al utilizar el método de solución del equilibrio de Nash en estrategias puras, se llega nuevamente a este resultado, dado que la estrategia de invertir representa siempre la mejor respuesta para cada una: al tener en cuenta la mejor respuesta de la competencia, cada empresa decide invertir ahora representándole una ganancia de $26,9 millones a cada una como resultado del juego.

Si el juego anterior contemplara una opción real de aplazar, este escenario podría representar un mejor resultado para las dos empresas (mayor beneficio). Este escenario describe el juego característico del dilema del prisionero, presentado por Tucker (1950), el cual representa una paradoja en la que las empresas terminan eligiendo aquella estrategia que les provee un beneficio más bajo, del que podrían obtener si, por ejemplo, deciden ponerse de acuerdo (cooperan). Esta situación es producto de la presencia de estrategias dominantes para cada empresa, en las que buscan obtener el más alto resultado posible. Un análisis de este tipo requiere, por

tanto, de otros principios de solución en el marco de la teoría de juegos cooperativos.

REFERENCIAS

Amram, M. y Kulatilaka, N. (1999). *Real options: Managing Strategic Investment in an Uncertain World*. Boston: Harvard Business School Press.

Black, F. y Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.

Brandao, L., Dyer, J. y Hahn, W. (2005). Using binomial decision trees to solve real options valuations problems. *Journal of Decision Analysis*, 2(2), 69-88.

Boyle, P. (1977). Options: A monte Carlo Approach. *Journal of Financial Economics*, 4(3), 323-338.

Brennan, M., y Schwartz, E. (1985). Evaluating Natural Resource Investments. *Journal of Business*, 58(2), 135-157.

Broadie, M. y Glasserman, P. (1996). Estimating Security Price Derivatives Using Simulation. *Management Science*, 42(2), 269-285.

Chevalier-Roignant, B. y Trigeorgis, L. (2011). *Competitive strategy: Options and games*. mit Press.

Copeland, T. y Antikarov, V. (2001). *Real Options: A Practitioner´s Guide*. New York: Texere Publishing Limited.

Copeland, T. y Antikarov, V. (2005). Real options: Meeting the Georgetown challenge. *Journal of Applied Corporate Finance*, 17(2), 32-51.

Copeland, T. y Tufano, P. (2004). A real world to manage real options. *Harvard Business School Review*, 82(3), 90-99.

Cox, J., Ross, S. y Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3), 229-263.

Dixit, A. y Pindyck, R. (1994). *Investment under uncertainty*. New Jersey: Princeton.

Fudenberg, D. y Tirole, J. (1985). Preemption and Rent Equalization in the Adoption of New Technology. *The Review of Economic Studies*, 52(3), 383-401.

Kester, W. (1984). Today´s options for tomorrow´s growth. *Harvard Business Review*, 62(1), 153-160.

Kodukula, P. y Popadesu, Ch. (2006). *Project Valuation Using Real Options: A Practitioner's Guide*. J-Ross Publushing, Inc.

McDonald, R. y Siegel, D. (1986). The Value of Waiting to Invest. *The Quarterly Journal of Economics*, 101(4), 707-727.

Merton, R. (1973). The Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141-183.

Myers, S. (1977). Determinants of Corporate Borrowing. *Journal of Financial Economic*, 5, 147-175.

Selten, R. (1975). Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory*, 4(1), 25-55.

Smith, J. y Nau, R. (1995). Valuing Risky Projects: Option Pricing Theory and Decision Analysis. *Management Science*, 41(5), 795-816.

Smit, H. y Trigeorgis, L. (2012). *Strategic investment: Real Options and Games*. Princeton University Press.

Trigeorgis, L. (1991). A Log-Transformed Binomial Numerical Analysis Method for Valuing Complex Multi-Option Investments. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 309-326.

Trigeorgis, L. (1993). The nature of option interactions and the valuation of investments with multiple real options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28(1), 1-20.

Trigeorgis, L. (1996). *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*. Cambridge: mit Press.

Tucker, A. (1950). *A Two Person Dilemma*. Stanford University (mimeo).

Editado por el Departamento de Publicaciones
de la Universidad Externado de Colombia
en diciembre de 2015

Se compuso en caracteres Adobe Garamond Pro de 11 puntos
y se imprimió sobre propalibros de 70 gramos
Bogotá (Colombia)

Post tenebras spero lucem